DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 heures

1° n est un entier positif fixé, p est un entier quelconque.

Calculer simultanément, suivant les valeurs de p :

$$S_1(n,p) = \sum_{j=1}^{n} \cos\left(p\,\frac{j\pi}{n+1}\right), \quad \text{et} \quad S_2(n,p) = \sum_{j=1}^{n} \sin\left(p\,\frac{j\pi}{n+1}\right)$$

2° En déduire les valeurs de l'expression :

$$\sum_{j=1}^{n} \sin\left(p\,\frac{j\pi}{n+1}\right) \sin\left(q\,\frac{j\pi}{n+1}\right)$$

où p et q sont des entiers quelconques appartenant à l'intervalle $[1, n]$.

Relativement à cette expression, que peut-on dire de l'ensemble des n vecteurs V_p $(p = 1, 2, \ldots, n)$ de $\mathbb{R}^n$ définis par les coordonnées :

$$\sin p\theta_j, \quad \text{où } \theta_j = \frac{j\pi}{n+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, n ?$$

.../...

3° Soit r un entier tel que : $1 \leqslant r \leqslant n$. On considère la matrice :

$$M = \begin{bmatrix} \sin \theta_1 & \sin 2\,\theta_1 & \ldots\ldots & \sin r\,\theta_1 \\ \sin \theta_2 & \sin 2\,\theta_2 & \ldots\ldots & \sin r\,\theta_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \sin \theta_j & \sin 2\,\theta_j & \ldots\ldots & \sin r\,\theta_j \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \sin \theta_n & \sin 2\,\theta_n & \ldots\ldots & \sin r\,\theta_n \end{bmatrix}$$

où les θ_j sont ceux définis à la question précédente. On note ${}^tM$, la matrice transposée de M. Calculer la matrice ${}^tMM$. Quel est son rang?

4° On suppose maintenant que : $1 \leqslant r = n$. Exprimer ${}^tM$ et la matrice inverse M^{-1} en fonction de M. Quelles conclusions en tire-t-on pour la matrice :

$$\sqrt{\frac{2}{n+1}}\,M$$

et pour la valeur de son déterminant?

5° On est toujours dans le cas : $1 \leqslant r = n$. Soit θ une variable angulaire et $f(\theta)$ une fonction numérique, impaire, périodique de période 2π, définie et continue sur l'intervalle $]0, \pi[$ et possédant les limites finies :

$$f(0+) = \lim_{\substack{\theta \to 0 \\ \theta > 0}} f(\theta) \qquad \text{et} \qquad f(\pi -) = \lim_{\substack{\theta \to \pi \\ \theta < \pi}} f(\theta)$$

Soit F la matrice colonne formée des valeurs $f(\theta_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

On pose : $F = MA$. A est une matrice colonne dont on donnera l'expression du terme général a_p. Calculer ${}^tAA$, et :

$$\lim_{n \to \infty} {}^tAA.$$

On pose :

$$g_n(\theta) = \sum_{p=1}^{n} a_p \sin p\,\theta.$$

Calculer :

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\pi} [f(\theta) - g_n(\theta)]^2\, d\theta.$$

6° Soit : $f(\theta) = 1$, quel que soit $\theta \in]0, \pi[$. Calculer a_p, et sachant que :

$$\sum_{q=0}^{\infty} \frac{\sin (2q+1)\,\theta}{2q+1}$$

converge sur $[0, \pi]$, en déduire la valeur de

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \theta \to 0}} g_n(\theta).$$

Quel que soit $\varepsilon > 0$ et quel que soit $\theta \in]0, \pi[$, existe-t-il un entier N ne dépendant que de ε, tel que $n \geqslant N$ entraîne :

$$|f(\theta) - g_n(\theta)| < \varepsilon \ ?$$

7° On se place enfin dans le cas où $1 \leqslant r < n$, et on pose : $\tilde{F} = MB$.

Déterminer B pour que : ${}^t(F - \tilde{F})(F - \tilde{F})$ soit *extremum*.

S'agit-il d'un maximum ou d'un minimum? Donner pour cette valeur de B un majorant de $|f(\theta_j) - \tilde{f}(\theta_j)|$, $j \in [1, n]$, en fonction de r, n et :

$$\sup_{j \in [1, n].} |f(\theta_j)|.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail